# 第 2 节 奇偶数列问题—综合篇（★★★☆）

## 内容提要

本节理解难度较高，但依然建议掌握，高考中常见的需分奇偶讨论的情形有下面几种.

1．递推式分奇偶：$n$ 为奇数和 $n$ 为偶数时的递推公式不同，此时一般需通过分奇偶讨论来分析数列 $\{a_n\}$.

2．递推式为 $a_{n+2}$ 和 $a_n$ 的关系：此为隔项递推，它反映的是相邻的奇数项，或相邻的偶数项之间的关系，在分析这种递推式时，往往也需分奇偶讨论. 有的题给的虽是 $a_{n+1}$ 和 $a_n$ 之间的递推式，但直接分析不易，要化为 $a_{n+2}$ 和 $a_n$ 的递推式来处理. 如本节例 2 的变式.

注意：分奇偶讨论时，下标变换是常用操作，$\{a_n\}$ 的奇数项构成的数列可表示为 $\{a_{2k-1}\}$，偶数项构成的数列为 $\{a_{2k}\}$，将 $a_n$ 看成定义在 $\mathbf{N}^*$ 上的函数，记作 $a_n=f(n)$，则 $a_{2k-1}=f(2k-1)$，$a_{2k}=f(2k)$. 而对于已知 $a_{2k-1}$ 和 $a_{2k}$ 求 $a_n$ 的问题，本质上就是已知 $f(2k-1)$ 和 $f(2k)$ 求 $f(n)$，可用换元法，分别令 $2k-1$ 和 $2k$ 等于 $n$，便可求得各自的 $f(n)$，即 $a_n$.

## 典型例题

### 类型Ⅰ：递推式分奇偶

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=3$，则当 $n$ 为奇数时，$a_n=$______.

**解析：** $a_{2k+1}-a_{2k-1}=3$ 怎样解读？我们可以取 $k=1$，2，3 来看看规律，

因为 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=3$，所以 $a_3-a_1=3$，$a_5-a_3=3$，$a_7-a_5=3$，故 $a_1,a_3,a_5,\cdots$ 构成公差为 3 的等差数列，



下面来求奇数项的通项 $a_{2k-1}$，得先搞清楚它是奇数项中的第几项，可以这么来看，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{2k}$ 共有 $2k$ 项，其中奇数项占一半，故最后一个奇数项 $a_{2k-1}$ 是奇数项的第 $k$ 项，

所以 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times 3=3k-2$ ①，再把 $a_{2k-1}$ 转换成 $a_n$，只需将下标换元，

令 $n=2k-1$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$，所以式①即为 $a_n=3\times\dfrac{n+1}{2}-2=\dfrac{3n-1}{2}$，故当 $n$ 为奇数时，$a_n=\dfrac{3n-1}{2}$.

**答案：** $\dfrac{3n-1}{2}$

【变式】（2021·新高考Ⅰ卷）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数}\\ a_n+2, n\text{ 为偶数}\end{cases}$.

（1）记 $b_n=a_{2n}$，写出 $b_1$，$b_2$，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

**解法 1：**（1）（$b_1$，$b_2$ 即为 $a_2$，$a_4$，要求它们，可按递推公式逐项计算）

由题意，$a_1=1$，$a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2+2=4$，$a_4=a_3+1=5$，

因为 $b_n=a_{2n}$，所以 $b_1=a_2=2$，$b_2=a_4=5$；

（数列 $\{b_n\}$ 即为 $\{a_n\}$ 中的偶数项，先分析其规律，把 $\{a_n\}$ 再算两项，$a_5=a_4+2=7$，$a_6=a_5+1=8$，观察发现 $a_2$，$a_4$，$a_6$ 成等差数列，于是猜想 $\{b_n\}$ 为等差数列，故计算 $b_{n+1}-b_n$，看是否为常数）

由所给递推公式可得 $b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=a_{2n+1}+1-a_{2n}=a_{2n}+2+1-a_{2n}=3$，

所以 $\{b_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，故 $b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$.

（2）（观察发现 $a_1$，$a_3$，$a_5$ 成等差数列，故猜想 $\{a_n\}$ 的奇数项为等差数列，下面给出严格的判断）

设 $c_n=a_{2n-1}$，则 $c_{n+1}-c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}=a_{2n}+2-a_{2n-1}=a_{2n-1}+1+2-a_{2n-1}=3$，

所以 $\{c_n\}$ 为等差数列，故 $c_n=c_1+(n-1)\times3=a_1+(n-1)\times3=1+3n-3=3n-2$，

（奇数项、偶数项的规律都找到了，求前 20 项和可按奇偶项分组）

所以 $\{a_n\}$ 的前 20 项和 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})$

$$=(c_1+c_2+\cdots+c_{10})+(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=\frac{10\times(1+28)}{2}+\frac{10\times(2+29)}{2}=300.$$

**解法 2**：（1）（解法 1 采用的是“观察，归纳，猜想，证明”的方法来分析 $\{a_n\}$ 奇偶项各自的规律，其实也可直接由所给递推公式来分析）

由题意，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数}\\ a_n+2, n\text{ 为偶数}\end{cases}$，所以 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n=2k-1\\ a_n+2, n=2k\end{cases}$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，

（接下来把 $n=2k-1$ 和 $n=2k$ 分别代入上述递推公式加以分析）所以 $\begin{cases}a_{2k}=a_{2k-1}+1 & ①\\ a_{2k+1}=a_{2k}+2 & ②\end{cases}$，

（观察发现只要消去 $a_{2k}$，就能得到 $a_{2k+1}$ 和 $a_{2k-1}$ 的关系，$\{a_n\}$ 中奇数项的规律就出来了）

把①代入②消去 $a_{2k}$ 可得 $a_{2k+1}=a_{2k-1}+1+2=a_{2k-1}+3$，所以 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=3$，

故数列 $\{a_n\}$ 的奇数项构成的数列 $\{a_{2k-1}\}$ 是公差为 3 的等差数列，

（下面求奇数项的通项 $a_{2k-1}$，得先搞清楚它是奇数项中的第几项. 类似例 1，$a_{2k-1}$ 是奇数项的第 $k$ 项）

又 $a_1=1$，所以 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times3=3k-2$，代入①得：$a_{2k}=a_{2k-1}+1=3k-1$，

因为 $b_n=a_{2n}$，所以 $b_1=a_2=2$，$b_2=a_4=5$，$b_n=a_{2n}=3n-1$.

（2）同解法 1，但需注意按此解法，第 1 问已经得到了奇数项为等差数列，故第 2 问直接求和即可.

**【总结】** 遇到分奇偶的递推式，可先写几项看规律（奇、偶项常为等差或等比数列）. 也可把 $n=2k-1$ 和 $n=2k$ 分别代入，将下标变换成 $k$，建立 $a_{2k+1}$，$a_{2k}$，$a_{2k-1}$ 的关系，例如想求奇数项，就消偶数项 $a_{2k}$.

**类型Ⅱ：递推式为 $a_{n+2}$ 和 $a_n$ 的关系**

【例 2】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=-1$，且 $a_{n+2}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$______.

**解析**：若看不懂 $a_{n+2}-a_n=2$，可取一些值代进去观察，$\begin{cases}a_3-a_1=2, a_5-a_3=2, a_7-a_5=2,\cdots\\ a_4-a_2=2, a_6-a_4=2, a_8-a_6=2,\cdots\end{cases}$，我们发现 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项分别构成公差为 2 的等差数列，故求 $a_n$ 应分奇偶讨论，

当 $n$ 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$，所以 $a_n=a_{2k-1}=a_1+(k-1)\cdot2=2k-1=2\cdot\dfrac{n+1}{2}-1=n$；

当 $n$ 为偶数时，设 $n=2k$，则 $k=\dfrac{n}{2}$，所以 $a_n=a_{2k}=a_2+(k-1)\cdot2=2k-3=2\cdot\dfrac{n}{2}-3=n-3$；

综上所述，$a_n=\begin{cases}n,n\text{为奇数}\\n-3,n\text{为偶数}\end{cases}$.

**答案：**$\begin{cases}n,n\text{为奇数}\\n-3,n\text{为偶数}\end{cases}$

**【反思】**若$\{a_n\}$满足$a_{n+2}-a_n=d$，则$\{a_n\}$的奇数项、偶数项各自构成公差为 $d$ 的等差数列，所以遇到这类递推式，应分奇偶讨论求通项公式.

【变式】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，且$a_na_{n+1}=2^{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求$\{a_n\}$的通项公式.

**解：**（对于这种相邻项相乘的形式，常进 $n$ 相除，化为类似等比数列的递推结构）

因为$a_na_{n+1}=2^{2n+1}$，所以$a_{n+1}a_{n+2}=2^{2(n+1)+1}=2^{2n+3}$，两式相除得：$\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^{2n+3}}{2^{2n+1}}$，故$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=4$，

（若看不懂$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=4$，可取一些值代进去看看，$\begin{cases}\dfrac{a_3}{a_1}=4,\dfrac{a_5}{a_3}=4,\dfrac{a_7}{a_5}=4,\cdots\\\dfrac{a_4}{a_2}=4,\dfrac{a_6}{a_4}=4,\dfrac{a_8}{a_6}=4,\cdots\end{cases}$，于是$\{a_n\}$的奇数项、偶数项分别构成公比为 4 的等比数列，故应分奇偶分别求通项）

当 $n$ 为奇数时，设$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则$k=\dfrac{n+1}{2}$，$a_n=a_{2k-1}=a_1\cdot4^{k-1}=2\times4^{k-1}=2^{2k-1}=2^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}=2^n$；



当 $n$ 为偶数时，设$n=2k$，则$k=\dfrac{n}{2}$，$a_n=a_{2k}=a_2\cdot4^{k-1}$ ①，

在$a_na_{n+1}=2^{2n+1}$中取$n=1$得$a_1a_2=2^3=8$，故$a_2=\dfrac{8}{a_1}=4$，代入①得：$a_n=4\times4^{k-1}=4^k=4^{\frac{n}{2}}=2^n$；

综上所述，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=2^n$.

**【反思】**像$a_na_{n+1}=f(n)$这种递推公式，可进 $n$ 得到$a_{n+1}a_{n+2}=f(n+1)$，两式相除得$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$，从而分奇偶讨论.

## 强化训练

1.（2023・全国模拟改・★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,n\text{为奇数}\\a_n+1,n\text{为偶数}\end{cases}$，若$3\le a_5\le15$，则$a_1$的取值范围是_____.

2．（2022·山东威海模拟改·★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n,n=2k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$.

（1）求$a_2$，$a_5$的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的前$2n$项和$S_{2n}$.

3．（2023·河北保定模拟改·★★★）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-a_n=4$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

4．（★★★）已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中$\lambda$为常数.

（1）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

（2）若$\lambda=4$，求$\{a_n\}$的通项公式.



5．（2015·湖南卷·★★★★）设数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，已知$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）证明：$a_{n+2}=3a_n$；

（2）求$S_n$.